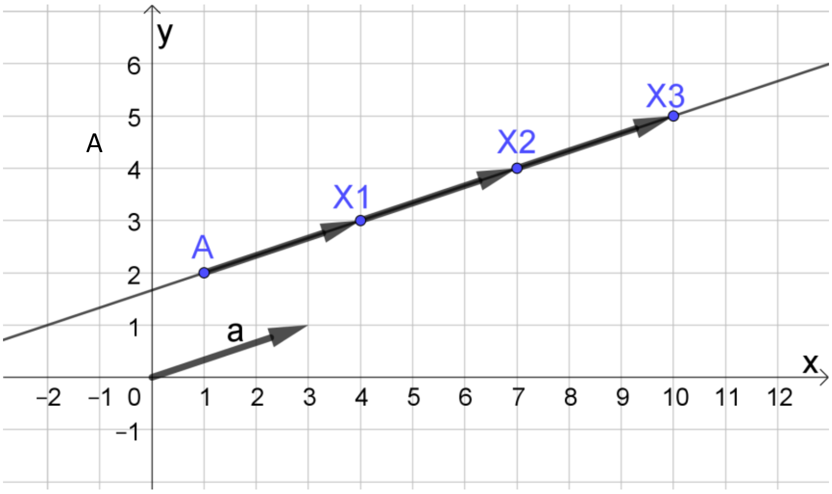
Vektorielle analytische Geometrie

1. Geradendarstellung in Parameterform

Ausgehend von einem Punkt A(1|2) kann durch mehrfaches Anhängen des Richtungsvektors $\vec{a} = \binom{3}{1}$ eine Reihe von Punkten $X_1 = A + \vec{a} = (4|3)$, $X_2 = A + 2\vec{a} = (7|4)$, $X_3 = A + 3\vec{a} = (10|5)$, … definiert werden:



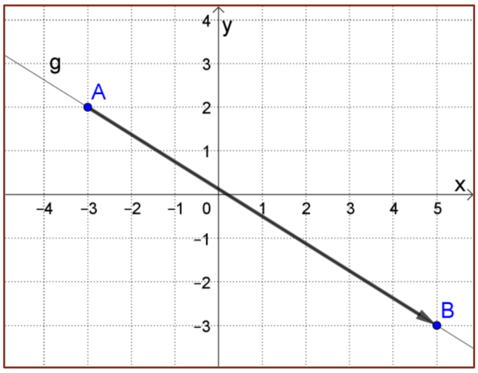
Daraus folgt die **<u>Geradendarstellung in Parameterform</u>** (Parameter t) $\boxed{g: X = A + t\cdot \vec{a}}$

Beispiel 1:
a) Gesucht ist die Parameterdarstellung der Geraden g durch A(-3|2) und B(5|-3).
b) Ist C(-19|12) auf der Geraden g?

Lösung:

a) $g: X = A + t\cdot \overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

$g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$



b) Wir setzen C für X ein:

$\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ ------

und spalten die Gleichung waagrecht in 2 Zeilen:

$\left\{ \begin{array}{l} -19 = -3 + 8t \\ 12 = 2 - 5t \end{array} \right\}$

und lösen die beiden Gleichungen in t auf:

$-19 = -3 + 8t \rightarrow -16 = 8t \rightarrow -2 = t$

$12 = 2 - 5t \rightarrow 10 = -5t \rightarrow -2 = t$

da die beiden Lösungen für t gleich sind, liegt C auf g.

Beispiel 2:

a) Erstellen Sie eine parallele Gerade h_1 zu g: X= $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ durch Q(1|4)

b) Erstellen Sie eine normale Gerade h_2 zu g durch Q

Lösung:

a) Eine **parallele** Gerade hat den gleichen Richtungsvektor wie g, der Startpunkt ist allerdings anders:

$$h_1: \quad X= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) Eine **normale** Gerade hat den gekippten Vektor als Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}^{L} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$h_2: \quad X= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

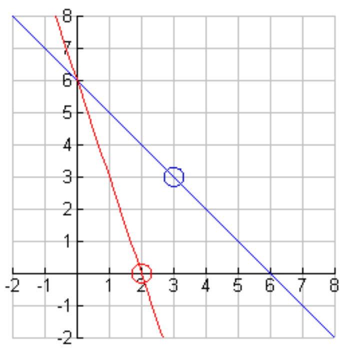
Geraden schneiden ➔ das ergibt einen Schnittpunkt:

Beispiel 3: Welchen Schnittpunkt erzeugen die Geraden

g: X = $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ **mit h: X =** $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **?**

Lösung:

Wenn der gemeinsame Schnittpunkt X von beiden Geraden gesucht wird, muss X=X gelten und daher kann man die rechten Seiten der Geradengleichungen gleich setzen:



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nun kommt die Schere und schneidet das in zwei Zeilen:

$$\left\{ \begin{matrix} 3 + 3t = 2 + 1s \\ 3 - 3t = 0 - 3s \end{matrix} \right\}$$

und wir haben Glück, durch einfache Addition der Gleichungen verschwindet der Parameter t:

$$6 = 2 - 2s \rightarrow 4 = -2s \rightarrow -2 = s$$

Und dann setzen wir s dort ein, wo es vorkommt:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir den Schnittpunkt S(0|6) erhalten !!!

Gerade im 3D–Raum:
Analog zur zweidimensionalen Vektorrechnung kann man die Gerade im Raum mit der Parameterform definieren: g: X = A + t· $\vec{a}$

Wenn A=(1,4,2) und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ➔ g: X = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Ebenen–Darstellung

a) Parameterdarstellung: Die Geradendarstellung wird einfach um einen weiteren Vektor $\vec{b}$ (mit Parameter s) ergänzt: $\boxed{X = A + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}$

b) Ebenengleichung: Die Gleichung $\boxed{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$ mit den Parametern a,b,c,d ∈ℝ stellt auch eine Ebene dar

Beispiel 4:
Erstellen Sie eine a) **Parameterform** und eine b) **Gleichungsform** der Ebene durch die Punkte A=(1|2|3), B=(7|6|3) und C=(9|−2|5)

Lösung:

a) Für die Parameterform brauchen wir zwei Vektoren. Das sind z.B: $\overrightarrow{AB}$ = B−A= (6|4|0) und $\overrightarrow{AC}$=(8|−4|2). Damit ergibt sich ➔ **e: X=(1|2|3)+t·(6|4|0) + s·(8|−4|2)**

b) Für die Gleichungsform setzen wir die Punkte einfach in die allgemeine Gleichungsform ein:

A=(1|2|3) ➔ a·1+b·2+c·3 = d
B=(7|6|3) ➔ a·7+b·6+c·3 = d
C=(9|−2|5) ➔ a·9+b·(−2)+c·5 = d

Da wir nun 3 Gleichungen aber 4 Variablen haben, ist das Gleichungssystem nicht eindeutig bestimmt, wir können eine Variable noch frei wählen. Es wäre d=1 möglich (0 geht nicht!)
Damit ergibt sich folgende Lösung: a = −1/23, b = 3/46, c = 7/23
Und somit die Gleichung: $-\frac{1}{23}x + \frac{3}{46}y + \frac{7}{23}z = 1$
Multipliziert man sie mit 46, ergibt sich eine bruchfreie Gleichung: **e: −2x+3y+14z=46**

Beispiel 5:

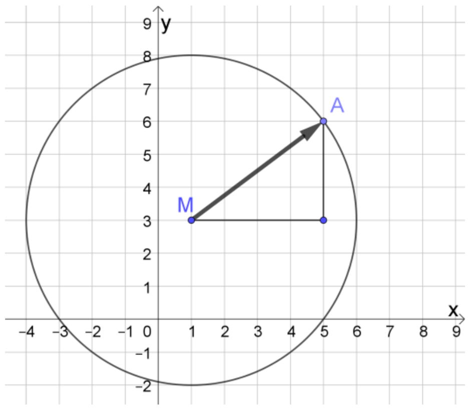
Schneiden Sie die Gerade g: X = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene ε: $3x + 12y - 4z = -4$

Lösung:
Die Gerade kann man in 3 Zeilen zerlegen:
x = 2+6t
x = 0+2t
z = −5+3t
Und dann in die Ebenengleichung einsetzen: 3·(x) + 12·(y) −4·(z) = −4
3·(2+6t) + 12·(0+2t) −4·(−5+3t) = −4 ➔ 26 + 30t = −4 ➔ t = −1

Setzt man t= −1 in die Parameterform ein, ergibt sich: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Lösung: Der Schnittpunkt **S= (−4|−2|−8)**

3. Kreis–Darstellung



Wenn der nebenstehende Kreis vektoriell dargestellt werden soll, so gilt hier, dass der Vektors $\overrightarrow{MA}$ immer den Betrag r haben muss

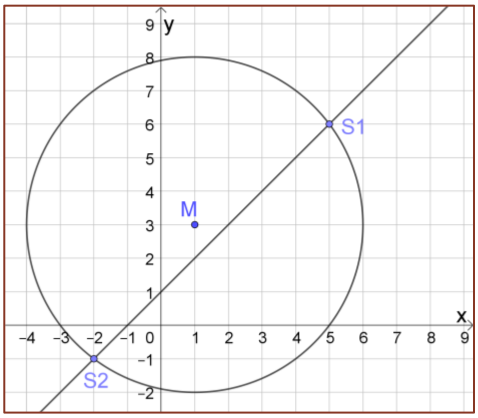
$|\overrightarrow{MA}| = r$ ➔ $|A-M| = r$ ➔ $\boxed{(x-mx)^2 + (y-my)^2 = r^2}$

mit den Koordinaten von A(x,y) und den Koordinaten von M(mx, my)

Hier ist es: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

Beispiel 6:
Schneiden Sie die Gerade g: $y = x+1$ mit dem Kreis $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

Lösung:
Hier kann man y in der Kreisgleichung durch die Geradengleichung ersetzen:
$(x-1)^2 + (x+1-3)^2 = 5^2$
➔ $x^2-2x+1 + x^2 -4x+4 = 25$
➔ $2x^2 -6x -20 = 0$
➔ $x_1 = 1{,}5+3{,}5 = 5$ und $x_2 = 1{,}5-3{,}5 = -2$
Setzt man diese Werte in die Geradengleichung ein, ergibt sich $y_1 = 6$ und $y_2 = -1$
Und das ergibt die **Schnittpunkte $S_1 = (5|6)$ und $S_2 = (-2|-1)$**



4. Kugel–Darstellung

Die Kugel hat eine ähnliche Darstellung wie der Kreis, nur mit der dritten Koordinate z dazu:
$\boxed{(x-mx)^2 + (y-my)^2 + (z-mz)^2 = r^2}$

Beispiel 7:
Schneiden Sie die Gerade g: $X=(1|2|3) + t\cdot(1|1|3)$ mit der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 7^2$

Lösung:
Auch hier können wir die Gerade in 3 Teile splitten:
$x = 1+t$ $y = 2+t$ $z = 3+3t$
und in die Kugelgleichung einsetzen: $(1+t)^2 + (2+t)^2 + (3+3t)^2 = 49$
➔ $1+2t+t^2 + 4+4t+t^2 + 9+18t+9t^2 = 49$
➔ $-35 +24t + 11t^2 = 0$ ➔ $t = 1$ oder $t = -35/11$
Setzt man das in die Geradengleichung ein, ergibt sich für die Schnittpunkte:
$S_1 = (1|2|3) + 1\cdot(1|1|3) =$ **(2|3|6)** und $S_2 = (1|2|3) -35/11\cdot(1|1|3) =$ **(−2,18|−1,18|−6,54)**

Übungen

1) Geben Sie die Parameterdarstellung der Geraden durch A und B an und überprüfen Sie, ob C oder D auf der Gerade liegt:
a) A(−4|1), B(3|2), C(7|6), D(−11|0)   b) A(−2|4), B(4|1), C(9|−2), D(2|2)

2) Erstellen Sie die Parameterdarstellung einer parallelen und einer normalen Geraden zu g durch Q:
a) g: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Q(4|3)   b) g: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Q(1|3)

3) Berechnen Sie den Schnittpunkt der zwei Geraden g und h:
a) g: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) g: $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) Nehmen Sie an, dass A und B die momentanen Koordinaten von zwei Schiffen auf einem linearen Kurs sind und bestimmen Sie zuerst den Schnittpunkt der Schifffahrtslinien und dann die Parameter s und t, die die Zeit angeben, die sie bis zum Schnittpunkt gebraucht haben:
a) $A = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 35 \\ -12 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$
c) $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

5) Erstellen Sie die Parameterform der Gerade durch A und B – oder durch A mit Richtungsvektor $\vec{a}$
a) A=(2|3|5), B=(7|−3|2)   b) A=(−2|3|−4), B=(7|6|−2)   c) A=(5|3|4), $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

6) Erstellen Sie die Parameterform der Ebene durch A,B,C
a) A=(2|3|5), B=(7|−3|2), C=(4|−1|0)   b) A=(1|4|−2), B=(4|2|0), C=(0|5|−3)

7) Erstellen Sie die Gleichungsform der Ebene durch A,B,C
a) A=(2|3|5), B=(7|−3|2), C=(4|−1|0)   b) A=(1|4|−2), B=(4|2|0), C=(0|5|−3)

8) Schneiden Sie die Gerade g mit der Ebene e
a) g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e: $2x - 4y + z = 14$ b) g: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e: $x + 3y - 2z = -16$

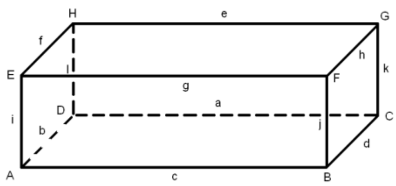
9) Nehmen Sie an, dass die Flugbahn des Flugzeugs durch g gegeben ist, wobei der Parameter t die Zeit bedeutet und der Richtungsvektor die Geschwindigkeit in m/s angibt. Diese Flugbahn führt durch eine Wolke, deren untere Ebene durch e gegeben ist. Berechnen Sie den Durchstoßpunkt des Flugzeuges durch die Wolkenebene und die Höhe (Koordinate z) des Flugzeuges dabei bzw. die Zeit, bei der das passiert.
a) g: $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ e: $2x - 4y + 10z = 39000$ b) g: $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 450 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix}$ e: $x + 2y + 15z = 265150$

10) Erstellen Sie eine Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r
a) M=(0|0), r=7   b) M=(7|2), r= 2   c) M=(4|−5), r= 4   d) M=(−2|6), r=8

11) Schneiden Sie die Gerade g mit dem Kreis k
a) g: X = (1|2) + t·(9|3)   k: $(x-4{,}5)^2+(y-6{,}5)^2 = 32{,}5$
b) g: y= −2x+12   k: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$
c) g: X = (1|2) + t·(5|−5)   k: $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 25$
d) g: X = (−12|5) + t·(17|7)   k: $x^2 + y^2 = 169$

12) Schneiden Sie die Gerade g mit der Kugel k
a) g: X=(0|9|9) + t·(1|−5|−1)   k: $x^2+y^2+z^2 = 81$
b) g: X=(1|−1|0) + t·(2|6|9)   k: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 121$

13*) Ein Quader soll die Punkte A(1|2|3), B(4|2|−1), D(5|2|6) und E(1|7|3) enthalten. Überprüfen Sie mit dem skalaren Produkt, ob zwischen AB, AD, AE ein rechter Winkel besteht und berechnen Sie die Koordinaten von C, F,G,H



Lösungen:

1a) g: $X = \binom{-4}{1} + t\cdot\binom{7}{1}$; nur $D \in g$ b) g: $X = \binom{-2}{4} + t\cdot\binom{6}{-3}$; nur $D \in g$

2a) p: $X = \binom{4}{3} + t\cdot\binom{-3}{1}$; n: $X = \binom{4}{3} + t\cdot\binom{1}{3}$ b) p: $X = \binom{1}{3} + t\cdot\binom{4}{2}$; n: $X = \binom{1}{3} + t\cdot\binom{-2}{4}$

3a) S = (−1,0) b) S = (4,−1)

4a) S = (5|8) ; t=10; s=2 b) S = (0|−2); t=2; s= 3 c) S = (−1,0); t=2; s= ½ d) S = (−3,−1) t=3, s=2

5a) X = (2|3|5) + t·(5|−6|−3) b) X = (−2|3|4) + t·(9|3|2) c) X = (5|3|4) + t·(4|5|−2)

6a) X = (2|3|5) + t·(5|−6|−3) + s·(2|−4|−5) b) X = (1|4|−2) + t·(3|−2|2) + s·(−1|1|−1)

7a) 18x + 19y − 8z = 53 b) y + z = 2

8a) t = 1 ➔ S = (6|−1|−2) b) t = −1 ➔ S = (−2|−4|1)

9a) t = 600 Sekunden = 10 Minuten ➔ S = (24200|18100|6300) 6300 m Höhe

9b) t = 1200 Sekunden = 20 Minuten ➔ S = (24100|72150|6450) 6450 m Höhe

10a) k: $x^2 + y^2 = 4\ 9$ b) $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 4$ c) $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 16$ d) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 64$

11a) $S_1 = (1|2)$, $S_2 = (10|5)$ b) $S_1 = (4|4)$, $S_2 = (6|0)$ c) $S_1 = (6|-3)$, $S_2 = (1|2)$ d) $S_1 = (5|12)$, $S_2 = (-12|5)$

12a) $S_1 = (1|5|9)$, $S_2 = (7|17|27)$ b) $S_1 = (3|5|9)$, $S_2 = (-1|-7|-9)$

13*) $AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $AD = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $AE = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, AB*AD = 0, AB*AE = 0, AD*AE = 0 ,

$C = B + AD = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $F = B + AE = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $G = C + AE = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $H = D + AE = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$